

2^ο μισό γράμμα 1

17/12/24

Διακρίσεις πολυωνύμων

π.χ. $f(x) = ax^2 + bx + c$ $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c = a + bx$
πολυμ συνισμ

Θα θεωρούμε τα πολυώνυμα (όχι σαν πολ/μικές συνισμ) αλλά σαν μεμονωμένες οντότητες οι οποίες είναι στοιχεία ενός συνόλου το οποίο ικανοποιεί συγκεκριμένες αλγεβρικές ιδιότητες.

π.χ. $\mathbb{R}_n[x]$ δ.χ. διάστασης $n+1$, βάση $(1, x, x^2, \dots, x^n)$
 $\mathbb{R}_1[x] < \mathbb{R}_2[x] < \mathbb{R}_3[x] < \dots < \mathbb{R}_n[x] < \mathbb{R}[x]$
δ.χ. διάστασης ∞ (περιέχει την $\mathbb{Q}$) αλλά δε σταματάει
επει $1, x, x^2, \dots, x^n, \dots$

-> Αν $f(x)$ και $g(x)$ είναι πολυώνυμα τότε ορίζεται
 $f(x) \cdot g(x)$ τα $\mathbb{R}_n[x], \mathbb{R}_m[x]$
~~Η κοινή βάση (1) δεν είναι δυνατόν γιατί η πράξη με~~
πετάει έξω.

Ορισμός: Θεωρούμε το $\mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$ ($\mathbb{Z}, \mathbb{P}$: πρώτος). Ένα πολ/μ ως προς x με συντελεστές από το $\mathbb{R}(\mathbb{C})$ είναι μια παράσταση μορφής:

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + a_{n+1}x^{n+1} + a_{n+2}x^{n+2} + \dots$$

ώστε οι συντελεστές $a_i \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$ και για κάποιο φυσικό n να ισχύει $a_i = 0 \ \forall i > n$

• Αν $a_n \neq 0$ και $a_i = 0 \ \forall i > n$ τότε αλλά γράφουμε:

$$a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$$

-> Δύο πολυώνυμα $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ και $g(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m$ θα
καλούνται ίσα αν $a_i = b_i \quad \forall i = 0, 1, \dots$

• Αν θέλουμε μπορούμε να θεωρούμε ένα πολυώνυμο σαν πολυωνυμική συνάρτηση: $f(x) = a_0 + \dots + a_nx^n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Συνήθως θα παραλείψουμε τους μηδενικούς συντελεστές και αντί $1 \cdot x^k = x^k$ επίσης θεωρούμε $0 \cdot x^k = 0$ και $x^0 = 1$

Ορισμός Το σύνολο των πολυωνυμικών ως προς x με συντελεστές από το $\mathbb{R}$ θα συμβολίζεται με $\mathbb{R}[x] \subset \mathbb{R}(x)$ και καλείται πολυωνυμικός "δακτύλιος"

Πρόταση: Στο σύνολο $\mathbb{R}[x]$ ορίζονται 2 πράξεις:

a) $f(x) + g(x)$

b) $f(x) \cdot g(x)$

Οι πράξεις είναι καλά ορισμένες: $f(x), g(x) \in \mathbb{R}[x] \Rightarrow$
 $\Rightarrow f(x) + g(x) \in \mathbb{R}[x]$
 $f(x) \cdot g(x) \in \mathbb{R}[x]$

$$\begin{array}{l} f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \\ g(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m \end{array} \quad |$$

$$m \leq n : f(x) + g(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \dots + (a_m + b_m)x^m + a_{m+1}x^{m+1} + \dots + a_nx^n \in \mathbb{R}[x]$$

$$f(x) \cdot g(x) = h(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_i = ?$$

Το γινόμενο θα γίνει με την επιμεριστική ιδιότητα:

$$c_0 = a_0 b_0, \quad c_1 = a_1 b_0 + a_0 b_1, \quad c_2 = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0$$

$$c_i = a_0 b_i + a_1 b_{i-1} + a_2 b_{i-2} + \dots + a_i b_0 = \sum_{t=0}^i a_t b_{i-t}$$

Ποσ θα σταθερίσει το $n(x)$? $c_{n+m} = a_n b_m$

$$c_{n+m} = \begin{matrix} a_i & b_j \\ 0 & 0 \end{matrix} + \dots$$

$$c_{n+m+1} = 0$$

$$c_{n+m-1} = a_n b_{m-1}$$

$$i+j = n+m+1$$

$$\left. \begin{matrix} 0 \leq i \leq n \\ 0 \leq j \leq m \end{matrix} \right\} \Rightarrow 0 \leq i+j \leq n+m$$

Με την πρόσθεση γνωρίζουμε ότι το $\mathbb{R}[x]$ αποτελεί δ.ν. και με τον πολλαπλασιασμό με τις επιμεριστικές ιδιότητες γίνεται δαυτύλιος.

Ορισμός: Το $a_i x^i$ καλείται μονώνυμο και κάθε πολλαί είναι άθροισμα μονωνύμων

$$\bullet \text{ Επίσης κάθε μονώνυμο } a_i x^i = (a_i x^{i-1}) x = a_i \cdot 1 x^{i-1} x^1$$

$$0 \leq k \leq i$$

Ορισμός: Αν ο μεγαλύτερος συντελεστής του πολυωνύμου είναι 1, τότε αυτό καλείται μονικό

π.χ: $f(x) = -x + 7x^5$ όχι μονικό

$g(x) = -3x - 5x^2 + x^5$ μονικό

Ορισμός: Έστω $f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$ με $n \geq 1$ και αυτό ο μεγαλύτερος n καλείται βαθμός του $f(x)$ και συμβολίζεται $\deg f = n$

→ Το σταθερό πολυώνυμο $f(x) = a_0$ με $a_0 \neq 0$ έχει μηδενικό βαθμό

→ Το μηδενικό πολυώνυμο $f(x) = 0$ δεν έχει βαθμό

π.χ.: $f(x) = 1$ έχει βαθμό 0

Πρόταση: Αν $f(x), g(x) \in \mathbb{R}[x]$, τότε $\deg(f(x) + g(x)) \leq \max(\deg f(x), \deg g(x))$ ενώ $\deg(f(x) \cdot g(x)) = \deg f(x) + \deg g(x)$

π.χ.: $f(x) = x + x^2$, $g(x) = 2 - x^2$ $f(x) + g(x) = 2 + x$

Θεώρημα: (Αλγόριθμος της Ευκλείδειας Διαίρεσης)

Αν $f(x), g(x) \in \mathbb{R}[x]$ με $g(x) \neq 0$, τότε υπάρχουν μοναδικά πολυώνυμα $\pi(x)$ και $u(x)$ ώστε:

$$f(x) = \pi(x) \cdot g(x) + u(x) \quad \text{και} \quad u(x) = 0 \quad \text{ή} \quad \deg(u(x)) < \deg(g(x))$$

Απόδ: $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$

$g(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m$

Αν $f(x) = 0$ ή $\deg(f(x)) < \deg(g(x))$, τότε $f(x) = \underbrace{0}_{\pi} \cdot \underbrace{g(x)}_g + \underbrace{f(x)}_u$

Έστω $\deg(f(x)) \geq \deg(g(x))$. Θα χρησιμοποιήσουμε επανειλημμένα στο βαθμό του $f(x)$

$$a) \quad \deg f(x) = \deg g(x) \Rightarrow f(x) = \underbrace{\frac{a_n}{b_n}}_{\pi} g(x) + \underbrace{\left(f(x) - \frac{a_n}{b_n} g(x) \right)}_u$$

$$u(x) = f(x) - \frac{a_n}{b_n} g(x) = a_0 + \dots + a_{n-1}x^{n-1} - \frac{a_n}{b_n} (b_1x + \dots + b_{n-1}x^{n-1})$$

Αν $u(x) = 0 \Rightarrow$ και το $u_2(x) = 0$ και $n_1(x) = n_2(x)$

$$f(x) = n(x)g(x) + u(x) \begin{cases} u(x) = 0 \\ \vee \\ 1) \deg(u(x)) < \deg(g(x)) \end{cases}$$

Ορισμός: Έστω $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ και $a \in \mathbb{R}$. Το a καλείται ρίζα του $f(x)$, αν $f(a) = 0$. Θα αναζητούμε πολλαπλότητα της ρίζας a τον φυσικό k , αν το $(x-a)^k$ διαιρεί το $|f(x)| = (x-a)^k n(x)$ και το $(x-a)^{k+1}$ δεν το διαιρεί δηλ.

$$f(x) = (x-a)^{k+1} n'(x) + u(x) \text{ με } (u(x) \neq 0)$$

Προσοχή!!! Η εύρεση των ριζών των πολυωνόμων είναι πολύ σημαντική και καθόλου εύκολη!

Ερώτημα βασικό: Κάθε πολυώνυμο έχει όλες τις ρίζες;
 $\Rightarrow$ Δηλ. μπορώ να το γράψω: $f(x) = r(x-a_1)^{k_1} (x-a_2)^{k_2} \dots (x-a_\ell)^{k_\ell}$???

Π.χ.: $x^2 + 1$ δεν έχει ρίζες στο $\mathbb{R}$

Θεώρημα: Βασικό Θεώρημα της αλгеβρας
Κάθε πολυώνυμο στον $\mathbb{C}[x]$ γράφεται σαν γινόμενο πρωτοβαθμίων παραγόντων. Δηλ. υπάρχουν στο $\mathbb{C}$ όλες οι ρίζες του
Οχι στον $\mathbb{R}[x]$, π.χ. $x^2 + 1$

Πρόταση: Τα περιττά βαθμού πολυώνυμα στον $\mathbb{R}[x]$ έχουν τουλάχιστον μία πραγματική ρίζα

Παρατήρηση: Τα αλγεαυ βαθμυ πολυωνυμυ στου $\mathbb{R}[x]$ μωρεί να μυν έχουν καμία ρίζα

Θεώρημα: Κάθε πολυωνυμυ βαθμυ n στου $\mathbb{R}[x]$ έχει το πολύ n διαμεωριθέμενυ ρίζεσ στου $\mathbb{R}$.

Παρατήρηση: Η $f(x) = x^4 + 2x^2 + 1$ δευ έχει ρίζεσ γιατί είναι $> 0 \forall x \in \mathbb{R}$.
 $f(x) = (x^2 + 1)^2$

Ορισμός: Ένα πολυωνυμυ $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ βαθμυ ≥ 1 καλείται ανώμω στου $\mathbb{R}[x]$ αν δευ μωρεί να γραφεί σαν γινώμενο δύο άλλων πολυωνυμων μωρότερου βαθμυ

π.χ: $x^2 + 1$ είναι ανώμω
 $x^4 + 2x^2 + 1$ δευ είναι ανώμω
 $a_{2k+1}x^{2k+1} + a_{2k}x^{2k} + \dots + a_0$ δευ είναι ανώμω δώτυ έχει μια γραμμωτή ρίζα

Θεώρημα: Αν το $f(x)$ έχει βαθμό ≥ 1 , τότε υπάρχουν ανώμω πολυωνυμω ώστε $f(x) = g_1(x)g_2(x)\dots g_k(x)$. Αυτά γράφεται σαν γινώμενο ανώμων πολυωνυμων

Παρατήρηση: 1) Τα ανώμω στου $\mathbb{R}[x]$ είναι τα δευτεροβάθμω με αρνητική διαμγινωσα και το πρωτοβάθμω

2) Το $f(x)$ έχει άρτιο βαθμό και πραγματωκόσ συντελεστέσ $f(x) \in \mathbb{R}[x]$. Το $f(x)$ διασπώται, γράφεται σαν γινώμενο πρωτοβάθμων πολυωνυμων, στου $\mathbb{C}[x]$

$f(x) = r(x-z_1)(x-z_2)\dots(x-z_k)$ με $z_i \in \mathbb{C}$.
Αν το z_i είναι ρίζα του $f(x)$, $f(z_i) = 0$, τότε και το $\bar{z}_i$ είναι επίσης ρίζα, $f(\bar{z}_i) = 0$

$$(x - z_1)(x - \bar{z}_1) = x^2 - \underbrace{(z_1 + \bar{z}_1)}_{\in \mathbb{R}} x + \underbrace{z_1 \bar{z}_1}_{|z_1|^2 = z_1 \cdot \bar{z}_1}$$

Π.Χ.
Νο εναρμωρεί η Εμμερδερσ Σταγερν στυν
 $f(x) = 9x^6 + 4x^3 + 1$ ηωρ $g(x) = x^2 + 2x + 3$

$9x^6 + 0x^5 + 0x^4 + 4x^3 + 0x^2 + 0x + 1$	$x^2 + 2x + 3$
$-9x^6 - 18x^5 - 27x^4$	$2x^4 - 18x^3 + 9x^2 + 40x$
$-18x^5 - 27x^4 + 4x^3 + 0x^2 + 0x + 1$	-107
$+18x^5 + 36x^4 + 54x^3$	
$9x^4 + 58x^3 + 0x^2 + 0x + 1$	
$-9x^4 - 18x^3 - 27x^2$	
$40x^3 - 27x^2 + 0x + 1$	
$-40x^3 - 80x^2 - 120x$	
$-90x^2 - 120x + 1$	
$+107x^2 + 214x$	
$24x + 32$	

$$f(x) = (9x^4 - 18x^3 + 9x^2 + 40x - 107)g(x) + 94x + 32$$

→ $x^2 - 3x + 2$ N.B οι ρίζες = Εξετάζουμε τους διαιρέτες του σταθ. όρου
 $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

$$\begin{pmatrix} x-1 \\ 2 \end{pmatrix} (x-2) = x^2 - \frac{5}{2}x + 1$$

Αν το πολυνο έχει μόνο αμέγαλους συντελεστές, ανδρς
Εξετάζουμε αν νδανές ρίζες τους διαιρέτες του σταθ
όρου : $x^2 - 3x + 2 \pm 1, \pm 2$ $1^2 - 3 + 2 = 0$ $2^2 - 6 + 2 = 0$
 $(x-1)(x-2)$